

Část I

Hydrogeologický model

1 Matematicko - fyzikální model úlohy ustáleného proudění

V této části nejprve shrneme matematický popis sledovaných procesů. Proudění podzemní vody je popsáno Darcyho zákonem, který zapíšeme ve tvaru:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K} \nabla(p + z); \quad p = \frac{\pi}{\rho \cdot g};$$

a rovnicí kontinuity, která pro nasycené prostředí má tvar

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

zde \mathbf{u} označuje filtrační rychlost, p tlakovou výšku, π označuje dynamickou složku tlaku, ρ je hustota vody a g gravitační konstanta. \mathbf{K} označuje tenzor hydraulické propustnosti, o kterém předpokládáme, že má diagonální tvar a tedy nenulové souřadnice jsou pouze K_{xx} , K_{yy} a K_{zz} .

Na hraničních plochách oblasti jsou předepsány okrajové podmínky. Na částech hranice zadaných povrchem terénu jsou zadány Dirichletovy okrajové podmínky ve tvaru

$$p = p_D$$

kde p_D označuje tlakovou výšku podzemní vody. Na částech hranice Γ_N sousedících vesměs s vrstvami velmi malou hydraulickou propustností, jsou zadány Neumannovy okrajové podmínky ve tvaru

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_N$$

kde \mathbf{n} označuje jednotkový vektor vnější normály a skalární funkce u_N označuje tok vody hranicí. Identifikace tohoto parametru bude předmětem variantních scénářů. Konečně na zbývajících částech hranice Γ_T , na kterých je identifikace okrajové podmínky obtížná, použijeme Newtonovy okrajové podmínky vyjadřující vztah mezi tokem a spádem tlakové výšky. Tento vztah můžeme zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \sigma(p - p_T)$$

kde σ označuje koeficient přechodu a p_T je vnější tlaková výška. Identifikace těchto parametrů bude předmětem kalibrace modelu.

1.1 Odvození slabého řešení

Oblast řešení označíme Ω a rozložíme do mnoha podoblastí - elementů. Systém těchto podoblastí označíme E_h . Symbolem Γ označíme strukturu stěn oddělujících jednotlivé podoblasti kromě té části, na které je zadána Dirichletova okrajová podmínka. Tato část je pak označena Γ_D . Dále budeme požadovat, aby stavové funkce vyjadřující tlakové pole i pole filtračních rychlostí splňovaly ve slabém smyslu Darcyho zákon i rovnici kontinuity na každé takové podoblasti. Na struktuře ploch oddělujících podoblasti požadujeme splnění podmínek transmise - tedy podmínek vyrovnané bilance vnějších toků vystupujících z přiléhajících elementů. Tenzor hydraulického odporu horninového prostředí označíme symbolem \mathbf{R} (tedy $\mathbf{R} = \mathbf{K}^{-1}$). Řešením úlohy podzemního proudění nazveme trojici funkcí \mathbf{u}, p, λ z prostoru $\mathbf{W}(\Omega) = \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) \times L_2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$, kde \mathbf{u} vyjadřuje vektorovou funkci pole filtračních rychlostí, p označuje skalární funkci tlakové výšky a λ označuje stopu tlakové výšky na stěnách rozkladu Γ oblasti Ω , které splňují následující rovnice

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_h} \int_e \mathbf{R}^e \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{v}^e dV - \sum_{e \in E_h} \int_e (p^e + z^e) \nabla \cdot \mathbf{v}^e dV + \\ \sum_{e \in E_h} \int_{\partial e \cap \Gamma} (p^{\partial e} + z^{\partial e}) \mathbf{v}^e \cdot \mathbf{n}^e dS = - \sum_{e \in E_h} \int_{\partial e \cap \Gamma_D} (p_D^{\partial e} + z_D^{\partial e}) \mathbf{v}^e \cdot \mathbf{n}^e dS \\ \sum_{e \in E_h} \int_e \nabla \cdot \mathbf{u}^e \varphi^e dV = 0 \\ \sum_{e \in E_h} \int_{\partial e \cap \Gamma_E} \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}^e \mu^{\partial e} dS = 0 \\ \sum_{e \in E_h} \int_{\partial e \cap \Gamma_N} \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}^e \mu^{\partial e} dS = \sum_{e \in E_h} \int_{\partial e \cap \Gamma_N} u_N^{\partial e} \mu^{\partial e} dS \\ \sum_{e \in E_h} \int_{\partial e \cap \Gamma_T} \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}^e \mu^{\partial e} dS + \sum_{e \in E_h} \int_{\partial e \cap \Gamma_T} \sigma^{\partial e} p^{\partial e} \mu^{\partial e} dS = \sum_{e \in E_h} \int_{\partial e \cap \Gamma_T} \sigma^{\partial e} p_T^{\partial e} \mu^{\partial e} dS \end{aligned} \tag{1.1}$$

pro libovolné trojice testovací funkcí \mathbf{v}, φ, μ vybrané též z prostoru $\mathbf{W}(\Omega) = \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) \times L_2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$. V integrační rovnici označují horní indexy restrikcí funkcí na uvedenou podoblast respektive její hranici.

Abychom zjednodušili zápisy rovnic pro další úpravy označíme integrály pomocí závorek. Pro skalární součin v prostoru $L_2(\Omega)$ použijeme kulaté závorky a na hraniční formu (tj. povrchové integrály) použijeme ostré závorky. Potom

můžeme výše uvedené rovnice zapsat ve zjednodušeném tvaru (index u příslušných závorek označuje oblast integrace a horní indexy u funkcí označují restrikcii této funkce na danou podoblast e respektive její hranici ∂e).

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in E_h} (\mathbf{R}^e \mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e)_e - \sum_{e \in E_h} ((p^e + z^e), \nabla \cdot \mathbf{v}^e)_e + \\
 \sum_{e \in E_h} \langle (\lambda^{\partial e} + z^{\partial e}), \mathbf{v}^e \cdot \mathbf{n}^e \rangle_{\partial e \cap \Gamma} = - \sum_{e \in E_h} \langle (p_D^{\partial e} + z^{\partial e}), \mathbf{v}^e \cdot \mathbf{n}^e \rangle_{\partial e \cap \Gamma_D} \\
 \sum_{e \in E_h} (\nabla \cdot \mathbf{u}^e, \varphi^e)_e = 0 \\
 \sum_{e \in E_h} \langle \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}^e, \mu^{\partial e} \rangle_{\partial e \cap \Gamma_E} = 0 \\
 \sum_{e \in E_h} \langle \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}^e, \mu^{\partial e} \rangle_{\partial e \cap \Gamma_N} = \sum_{e \in E_h} \langle u_N^{\partial e}, \mu^{\partial e} \rangle_{\partial e \cap \Gamma_N} \\
 \sum_{e \in E_h} \langle \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{n}^e, \mu^{\partial e} \rangle_{\partial e \cap \Gamma_T} + \sum_{e \in E_h} \langle \sigma \lambda^{\partial e}, \mu^{\partial e} \rangle_{\partial e \cap \Gamma_T} = \sum_{e \in E_h} \langle \sigma p_T^{\partial e}, \mu^{\partial e} \rangle_{\partial e \cap \Gamma_T}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Tuto soustavu integrodiferenciálních rovnic budeme nyní diskretizovat a odvodíme soustavu lineárních rovnic.

1.2 Diskretizace modelu užitím MH-FEM

Podoblasti rozdělující zájmový prostor budeme v dalším textu nazývat elementy. Parametr diskretizace označíme h . Původní prostor vektorových funkcí reprezentující toky označený výše jako $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ budeme dále aproximovat prostorem $\mathbf{RT}_{-1}^0(E_h)$, který je definován jako lineární obal konečné baze tvořené po částech lineárními funkcemi (lineárními na každém elementu e). Na zvolené podoblasti e bude mít i -tá funkce následující tvar

$$\mathbf{v}_i^e = k_i^e \begin{pmatrix} x - \alpha_{1i}^e \\ y - \alpha_{2i}^e \\ z - \alpha_{3i}^e \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Na 3D podoblasti - simplexovém elementu - dostaneme čtyři takové funkce, na 2D podoblasti tvořené trojúhelníkem dostaneme tři funkce a na 1D podoblasti - liniovém prvku dostaneme dvě takové funkce. Tyto funkce budou splňovat podmínku jednotkového toku každou částí hranice ∂e , která odděluje dva sousední elementy. Tuto podmínku vyjádřit následovně:

$$\int_{f_j} \mathbf{v}_i^e \cdot \mathbf{n}_j^e dS = \delta_{ij} \tag{1.4}$$

Zde f_j označuje j -tou stěnu elementu e a \mathbf{n}_j je jeho jednotková vnější normála, δ_{ij} je Croneckerův symbol. Množinu indexů vektorových funkcí označíme I a její mohutnost označíme $|I|$.

Prostory $L_2(\Omega)$ respektive $H^{1/2}(\Omega)$ budeme aproximovat pomocí prostorů $M^0(E_h)$ respektive $M^0(\Gamma_h)$ po částech konstantních funkcí, tedy konstantních funkcí na každém elementu $e \in E_h$ respektive na každé stěně oddělující dva elementy $f \in \Gamma_h$.

Bázové funkce těchto prostorů můžeme popsat následovně:

$$\varphi_i^e(x) = \begin{cases} 1 & x \in e \wedge i = e \\ 0 & x \notin e \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\mu_j^f(x) = \begin{cases} 1 & x \in f \wedge j = f \\ 0 & x \notin f \end{cases} \quad (1.6)$$

Nyní zavedeme následující indexové označení. Indexovou množinu všech elementů označíme J a její mohutnost označíme $|J|$ a konečně indexovou množinu všech mezelementových i vnějších stěn označíme K a její mohutnost označíme $|K|$. Pro vnitřní mezelementové stěny budeme užívat množinu indexů označených symbolem K_E . A podobně pro vnější stěny, na kterých jsou zadány postupně Dirichletovy, Neumannovy respektive Newtonovy okrajové podmínky označíme symboly K_D, K_N, K_T . Jejich mohutnosti označíme analogicky $|K_D|, |K_N|$ a $|K_T|$. Tedy tímto způsobem máme identifikovány všechny funkce, které vystupují v definici slabého řešení a náležitosti jednotlivých funkcí jednotlivým elementům již nemusíme vyznačovat. Budeme to činit jen v případech, kdy chceme tuto skutečnost zvýraznit.

Přibližné řešení úlohy proudění budeme hledat ve formě lineární kombinace bázových funkcí, tedy ve tvaru:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) &= \sum_{i \in I} U_i \mathbf{v}_i(\mathbf{x}) \\ p_h(\mathbf{x}) &= \sum_{j \in J} P_j \varphi_j(\mathbf{x}) \\ \lambda_h(\mathbf{x}) &= \sum_{k \in K} \Lambda_k \mu_k(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Dosazením uvedených vztahů (1.7) do systému integrálních rovnic (1.3), odvodíme pro bázové testovací funkce soustavu lineárních algebraických rovnic.

Označíme-li $A_{ij}^e = (\mathbf{R}^e \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)_e$, dostaneme blokovou matici \mathbf{A}^e , jejíž prvky jsou nenulové pouze tehdy, jsou-li zvolené indexy i, j indexy vektorových funkcí, jejichž definičním oborem je element e .

Dále označíme $\mathbf{B}_{ij}^e = -(\varphi_i, \nabla \cdot \mathbf{v}_j)_e$ dostaneme blokovou matici \mathbf{B}^e , jejíž prvky jsou opět nenulové jedině tehdy, když funkce φ_i a \mathbf{v}_j mají definiční obor element e . V tomto případě bude $\mathbf{B}_{ij} = -1$. To plyne z definice funkce φ_i viz (1.5) a z vlastnosti vektorové funkce \mathbf{v}_j viz (1.4). V ostatních případech bude souřadnice rovna nule.

Konečně označíme $C_{ij}^{\partial e} = \langle \mu_i, \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{n}^e \rangle_{\partial e}$, dostaneme blokovou matici $\mathbf{C}^{\partial e}$, jejíž prvky jsou opět nenulové jedině tehdy, když funkce μ_i má definiční obor na stěně f elementu e a \mathbf{v}_j má definiční obor na elementu e a realizuje jednotkový přetok stěnou f . V tomto případě bude $\mathbf{C}_{ij} = 1$. Plyne to z definice funkce μ_i viz (1.6) a z vlastnosti vektorové funkce \mathbf{v}_j viz (1.4). V ostatních případech bude souřadnice \mathbf{C}_{ij} rovna nule.

Obdobně vypočteme i subvektory pravé strany, které závisí na zadaných okrajových podmínkách.

V uvedené interpretaci lze soustavu (1.2) zapsat ve tvaru lineárních algebraických rovnic:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{\Lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_D \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_T \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Nyní probereme výpočet jednotlivých souřadnic ještě podrobněji.

1.3 Algoritmus výpočtu diskrétní soustavy

Nejprve vypočteme prvky bloku \mathbf{A}^e . Ten se sestává z diagonálních bloků, jejichž rozměr je dán dimenzí prostoru vektorových funkcí definovaných na elementu. Tato dimenze je dána počtem stěn 3D prvku, počtem hran 2D prvku, u liniových prvků je rozměr tohoto bloku vždy 2×2 . U simplexových prvků je rozměr bloku \mathbf{A}^e pro 3D prvky (čtyřstěny) 4×4 a pro 2D prvky - trojúhelníky 3×3 . Jednotlivé souřadnice jsou dány vztahem:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}^e]_{ij} &= \int_e [\mathbf{v}_i^e]^T \mathbf{R}^e [\mathbf{v}_j^e] dV = \\ &= k_i^e k_j^e \int_e (x - \alpha_{1i}^e \quad y - \alpha_{2i}^e \quad z - \alpha_{3i}^e) \mathbf{R}^e \begin{pmatrix} x - \alpha_{1j}^e \\ y - \alpha_{2j}^e \\ z - \alpha_{3j}^e \end{pmatrix} dV \end{aligned} \quad (1.9)$$

Blok \mathbf{A} je blokově diagonální matice, jejíž diagonální bloky jsou tvořeny lokálními bloky \mathbf{A}^{e_j} ; $j \in J$. Tedy strukturu bloku \mathbf{A} lze znázornit následujícím schématem:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{A}^{e_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\mathbf{A}^{e_{|J|}}} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Snadno vypočteme a sestavíme blok B , jehož rozměr je $|I| \times |J|$. Tento blok se sestává z diagonálních subbloků o rozměrech 4×1 pro čtyřstěn, 3×1 pro trojúhelník a 2×1 pro úsečku (liniový prvek). Na základě definice jednotlivých souřadnic subbloku a vlastností vektorových funkcí dané vztahem (1.4) odvodíme:

$$-\int_e \varphi^e \nabla \cdot \mathbf{v}_j^e dV = -\int_e \nabla \cdot \mathbf{v}_j^e dV = -1 \quad (1.11)$$

$$\text{Tedy } \mathbf{B}^e = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pro čtyřstěn, } \mathbf{B}^e = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pro trojúhelník a } \mathbf{B}^e = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pro úsečku.

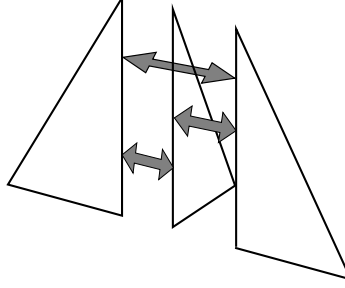
Strukturu bloku \mathbf{B} lze znázornit schématem:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{B}^{e_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\mathbf{B}^{e_{|J|}}} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Blok \mathbf{C} má rozměr $|I| \times |K|$, kde K označuje indexovou množinu všech vnitřních stěn a okrajových stěn, na nichž není zadána Dirichletova okrajová podmínka (pro 3D síť) respektive indexovou množinu všech vnitřních hran a hran, na nichž není zadána Dirichletova okrajová podmínka (pro 2D síť) respektive konečně indexovou množinu všech vnitřních uzlů a okrajových uzlů, na nichž není zadána Dirichletova okrajová podmínka (pro 1D síť). U sítě složené ze čtyřstěnů každý sloupec reprezentuje jednu stěnu. Pokud se jedná o vnitřní stěnu, bude sloupec obsazen právě dvěma jedničkama na pozicích, které odpovídají indexům básových vektorových funkcí, které realizují jednotkový tok právě touto stěnou. Na ostatních pozicích tohoto sloupce budou nuly. Jedná-li se o okrajovou stěnu, bude ve sloupci pouze jedna jednička na pozici indexu básové funkce, která definuje jednotkový tok zmíněnou stěnou. Podobně je tomu i u puklinové sítě složené z trojúhelníků respektive liniové sítě složené z úseček. Rozdíl je pouze v tom, že vnitřní hrany mohou ve 3D prostoru sousedit s více prvky, jak ukazuje obrázek 1. Proto ve sloupcích odpovídajících uvedeným vnitřním hranám nebo uzlům může být i více jedniček než dvě.

Rozdělíme indexovou množinu K do dvou podmnožin $K = K^0 \cup K^\partial$ vnitřních a okrajových stěn, na kterých není zadána Dirichletova okrajová podmínka. Potom můžeme matici \mathbf{C} znázornit schématem:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^\partial \end{pmatrix} \quad (1.13)$$



Obrázek 1: Sousednost puklinové sítě ve 3D

Konečně blok \mathbf{T} má rozměr $|K| \times |K|$ a je diagonální. Užijeme-li zavedenou symboliku, můžeme blok \mathbf{T} znázornit

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^\partial \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Na diagonále vnitřních stěn je nula, stejně tak jako na pozicích okrajových stěn, na kterých je zadána Neumannova okrajová podmínka. Na diagonálních pozicích, které náleží okrajovým stěnám s Newtonovou okrajovou podmínkou, jsou odpovídající přechodové koeficienty se záporným znaméním. Tedy na k -té „Newtonově“ stěně je číslo $-\sigma_k S_k$, kde S_k označuje plochu k -té stěny.

Na pravé straně soustavy (1.8) jsou dva subvektory q_D, q_T . Subvektor q_D zadává do soustavy vliv Dirichletových okrajových podmínek. Na j -té pozici tohoto subvektoru je číslo vypočtené ze vztahu

$$[q_D]_j = -Z_T^j - P_D^j \quad (1.15)$$

Zde připomínáme, že ve vztahu (1.15) symbol Z_T^j vyjadřuje těžiště j -té stěny a symbol P_D^j je hodnota Dirichletovy okrajové podmínky na j -té stěně.

Subvektor q_T zadává do soustavy vliv Neumanovy respektive Newtonovy okrajových podmínek. Na k -té stěně zadána Neumannova okrajová podmínka, bude na k -té pozici tohoto subvektoru číslo

$$[q_T]_k = U_N^k \quad (1.16)$$

kde U_N^k zadává hodnotu vnějšího toku na této stěně. Pokud je na k -té stěně zadána Newtonova okrajová podmínka, dosadíme na k -tou souřadnici číslo

$$[q_T]_k = -\sigma^k P_N^k S_k \quad (1.17)$$

kde σ_k zadává koeficient přechodu na této stěně, P_N^k zadává hodnotu tlakové výšky na této stěně a S_k označuje plochu k -té stěny..

2 Kombinovaný model - propojení prvků různých dimenzí

V této kapitole se budeme věnovat stavbě modelů pro řešení hydrogeologické situace v reálných horninových formacích. Reálné horninové útvary mohou být a obvykle bývají velmi heterogenní svými geofyzikálními a geochemickými vlastnostmi a tedy i hydrogeologickými vlastnostmi. Podzemní voda proudí nejen rozsáhlými bloky sedimentů, ale i bloky porušených granitů, rul a dalších hornin. Všechny typy hornin jsou obvykle dále porušené tektonickou činností a mohou tedy obsahovat množství puklinových zón, které významně mění hydrogeologickou situaci ve srovnání s představou proudění v homogenizovaných horninových blocích. Tedy reálná situace vyžaduje aplikaci prvků s různými hydrogeologickými vlastnostmi. Proto tato kapitola popisuje stavbu modelů, které využívají jak 3D bloky horniny vzájemně oddělené jednotlivými hydraulicky významnými puklinami nebo dokonce 2D prvky představující vlastnosti úzkých puklinových zón.

Je třeba připomenout, že významnou heterogenitu horninového prostředí lze částečně řešit i použitím velmi heterogenní sítě obsahující pouze různé veliké 3D prvky s výraznými změnami hydraulické propustnosti. Takovéto řešení lze vnímat jako náhradní, neboť generuje celou řadu problémů spojených s regularitou sítě, špatnou podmíněností výsledných soustav a tím i s omezeným rozsahem (ve smyslu počtu prvků) řešených úloh.

Problém stavby modelu používajícího prvky různé dimenze (dále nazývané kombinované modely proudění) budeme řešit v několika verzích. Pokud je geometrie heterogenního horninového prostředí „jednoduchá“, doporučujeme použít kombinovaný model s kompatibilní konfigurací. Tedy model, ve kterém jsou 2D prvky současně dělicími stěnami 3D prvků. V komplikovaném geologickém prostředí může být příprava kompatibilní sítě problematická, je proto vhodnější použít nekompatibilní verzi modelu, kdy v zájmovém horninovém prostředí působí do jisté míry nezávisle 3 systémy přenášející podzemní vodu - jednak porézní 3D bloky, dále 2D puklinovou sítí tektonických poruch a konečně i liniovou sítí 1D prvků (mohou reprezentovat síť tunelů apod.). Tyto tři sítě mohou působit jak nezávisle, tak mohou být propojeny vazbami definujícími podmínky přechodu podzemní vody mezi uvedenými druhy systémů. Tyto vazby jsou současně i parametry kalibrace kombinovaného modelu. Oba uvedené přístupy budeme využívat pro stavbu jak ustálených tak i neustálených režimů proudění.

2.1 Kombinovaný model - ustálené proudění

V předcházející kapitole jsme odvodili model pro ustálené proudění založený na smíšené hybridní formulaci úlohy. Přitom celé odvození je platné pro simplexové prvky všech dimenzí. Tedy formálně můžeme stavovou matici pro liniový systém zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_J \end{pmatrix}_1 & \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_J \end{pmatrix}_1 & \mathbf{C}_1 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_J^T \end{pmatrix}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Pro tento případ jsou blokové matice \mathbf{A}_i reprezentovány bloky 2×2 , neboť na každém prvku jsou definovány dvě vektorové funkce reprezentující jednotkové „liniové“ vnější toky. V případě napojení takového to systému na systém vyšší dimenze bude nutné dát těmto veličinám odpovídající fyzikální rozměr. Bloky \mathbf{B}_j jsou reprezentovány vektorem 2×1 , jehož souřadnice jsou rovny -1 . Konečně submatice \mathbf{C}_1 je tvořena $2|I_1|$ řádky a $|K_1|$ sloupci. V každém sloupci, který náleží dělicímu „vnitřnímu“ uzlu jsou dvě nebo více jedniček. Počet jedniček je dán počtem elementů, který daný uzel odděluje. Jedničky jsou pak na těch řádcích, které odpovídají oddělovaným elementům a lokálnímu číslování daného uzlu v daném koincidujícím elementu. U „vnějších“ uzlů je ve sloupci právě jedna jednička na místě příslušného koincidujícího elementu a pozici odpovídající lokálnímu číslování tohoto uzlu v elementu. „Vnější“ uzly, ve kterých je zadána Dirichletova okrajová podmínka nemají v bloku \mathbf{C}_1 svůj sloupec, neboť jsou součástí pravé strany, tedy vektoru \mathbf{q}_{D1} . Podobně můžeme stavovou matici pro puklinový systém zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_J \end{pmatrix}_2 & \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_J \end{pmatrix}_2 & \mathbf{C}_2 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_J^T \end{pmatrix}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2^T & \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

V tomto případě jsou blokové matice \mathbf{A}_i reprezentovány bloky 3×3 , neboť na každém prvku jsou definovány tři vektorové funkce reprezentující jednotkové

„plošné“ vnější toky. I v případě napojení puklinového systému na systém 3D prvků bude nutné dát těmto veličinám odpovídající fyzikální rozměr. Bloky \mathbf{B}_j jsou reprezentovány vektorem 3×1 , jehož souřadnice jsou rovny -1 . Konečně submatice \mathbf{C}_2 je tvořena $3|I_2|$ řádky a $|K_2|$ sloupce. V každém sloupci, který náleží dělicí „vnitřní“ hraně jsou dvě nebo více jedniček. Počet jedniček je dán počtem elementů, který daná hrana odděluje. Jedničky jsou pak na těch řádcích, které odpovídají oddělovaným elementům a lokálnímu číslování dané hrany v daném koincidujícím elementu. U „vnějších“ hran je ve sloupci právě jedna jednička na místě příslušného koincidujícího elementu a pozici odpovídající lokálnímu číslování této hrany v elementu. „Vnější“ hrany, ve kterých je zadána Dirichletova okrajová podmínka nemají v bloku \mathbf{C}_2 svůj sloupec, neboť jsou součástí pravé strany, tedy vektoru \mathbf{q}_{D2} .

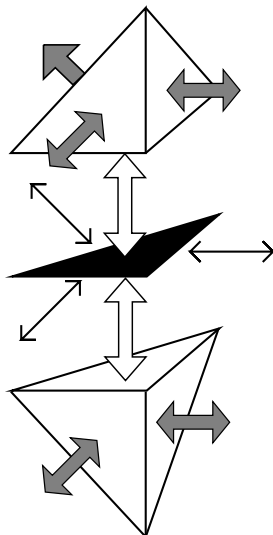
Konečně můžeme i stavovou matici pro objemový 3D systém zapsat ve formálním tvaru

$$\left(\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_J \end{array} \right)_3 & \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_J \end{array} \right)_3 & \mathbf{C}_3 \\ \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_1^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{B}_J^T \end{array} \right)_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{B}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_3^T & \mathbf{0} & \mathbf{T}_3 \end{array} \right) \quad (2.3)$$

V tomto případě jsou blokové matice \mathbf{A}_i pro simplexové prvky reprezentovány bloky 4×4 , neboť na každém prvku jsou definovány čtyři vektorové funkce reprezentující jednotkové „objemové“ vnější toky. Pokud na tento systém budeme napojovat systémy nižší dimenze, musí být puklinové a liniové toky rozměrově upraveny tak, aby odpovídaly tokům objemovým. Bloky \mathbf{B}_j jsou reprezentovány vektorem 4×1 , jehož souřadnice jsou rovny -1 . Konečně submatice \mathbf{C}_3 je tvořena $4|I_3|$ řádky a $|K_3|$ sloupce. V každém sloupci, který náleží dělicí „vnitřní“ stěně jsou právě dvě jedničky, protože v tomto případě každá stěna odděluje právě dva elementy. Jedničky jsou na těch řádcích, které odpovídají oddělovaným elementům a lokálnímu číslování dané stěny v daném koincidujícím elementu. U „vnějších“ stěn je ve sloupci právě jedna jednička na místě příslušného koincidujícího elementu a pozici odpovídající lokálnímu číslování této stěny v elementu. „Vnější“ stěny, na kterých je zadána Dirichletova okrajová podmínka nemají v bloku \mathbf{C}_3 svůj sloupec, neboť jsou součástí pravé strany, tedy vektoru \mathbf{q}_{D3} .

Nyní popíšeme způsob napojení 3D a 2D prvků. Situace je znázorněna na obrázku 2. Nechť mezi dva objemové prvky je vložena stěna, která je součástí

puklinové sítě a může tedy odvádět část podzemní vody do propojeného systému puklin nebo naopak přivádět vodu do objemových prvků.



Obrázek 2: Napojení 3D a 2D prvků

To, jakým způsobem budou tyto prvky mezi sebou komunikovat, závisí na tlakové výšce, která je v těžištích navazujících stěn. Dále je důležité si uvědomit, že pokud na sebe dva objemové prvky přímo navazovaly, tvořila společná stěna oddělující stěnu, na které byla vypočtena jedna tlaková výška. Pokud mezi stěnami je umístěn puklinový prvek, potom jsou původní stěny okrajové a tedy samostatné a mohou na nich být rozdílné tlakové výšky. Nechť tedy na stěnách objemových prvků je tlaková výška dána hodnotami λ_1 respektive λ_2 a mezi nimi leží puklinový prvek, jehož tlaková výška v těžišti je dána hodnotou p , nechť dále mezi prvním objemovým prvkem a prvkem puklinovým je přechodový stav charakterizován hodnotou σ_1 a mezi druhým objemovým prvkem a prvkem puklinovým je přechodový stav charakterizován hodnotou σ_2 . Potom okrajové podmínky na sledovaném rozhraní můžeme vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \sigma_1 (\lambda_1 - p) ; \quad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma_2 (\lambda_2 - p) \quad (2.4)$$

Tyto podmínky vytvoří modifikace v původně odvozených soustavách pro síť objemových prvků a puklinovou síť, které jsme zapsali do jedné kombinované soustavy. Přitom nejprve musíme modifikovat původní soustavu pro puklinovou síť tím, že jednotlivé blokové lokální matice příslušné jednotlivým elementům násobíme rozevřením. Tedy parametrem d^e . Přitom dbáme, aby byla zřejmá

korelace mezi parametrem rozevření a hydraulickou propustností každého elementu. Tedy $d_1^e \approx \|K_2^e\|$. Tato úprava je formálně znázorněna horní vlnovkou.

$$\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{C}_3^\# \\ \mathbf{B}_3^T & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_3^{\#T} & 0 & \mathbf{T}_3^\# \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_{23} & 0 \end{pmatrix} \right) \quad (2.5)$$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{t}_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_2 & \tilde{\mathbf{B}}_2 & \tilde{\mathbf{C}}_2 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2^T & \tilde{\mathbf{d}}_2^\# & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_2^T & 0 & \tilde{\mathbf{T}}_2 \end{pmatrix} \right)$$

Soustava je navíc doplněna o propojující bloky \mathbf{t}_{23} respektive \mathbf{t}_{32} , přičemž snadno z odvození uvidíme, že bude platit symetrie celé soustavy, speciálně, že $\mathbf{t}_{23} = \mathbf{t}_{32}^T$. Dále jsou upraveny bloky \mathbf{C}_3 a \mathbf{T}_3 . Všechny naznačené úpravy jsou symetrické a nyní tyto úpravy popíšeme. V původní soustavě odpovídající 3D síti jsou sousední prvky odděleny jednou stěnou. Pokud se mezi tyto prvky zařadí puklinový prvek, potom se z původních vnitřních objemových prvků stavají prvky okrajové ve vztahu k 3D síti a komunikují pouze s prvkem puklinovým. Tedy předpokládejme, že k této situaci došlo na k -té stěně oddělující i_1 a i_2 objemový prvek. Potom se původní k -tý sloupec bloku \mathbf{C}_3 rozdělí na dva sloupce k_1 a k_2 , které budou mít v uvedeném bloku již pouze jednu jedničku (náležící příslušné pozici stěny i_1 -ního respektive i_2 -hého prvku. A pochopitelně i k -tý řádek matice \mathbf{C}_3^T se rozdělí na dva řádky, které mají v příslušných pozicích bloku \mathbf{C}_3^T právě jednu jedničku. Uvedeným rozšířením bloků \mathbf{C}_3 a \mathbf{C}_3^T dojde současně i k rozšíření bloku \mathbf{T}_3 , který měl na původní k -té souřadnici na diagonále nulu. Nyní na čtyřech vzniklých pozicích budou následující hodnoty

$$[\mathbf{T}_3]_{k_1 k_1} = -\sigma_1; [\mathbf{T}_3]_{k_2 k_2} = -\sigma_2; [\mathbf{T}_3]_{k_1 k_2} = 0; [\mathbf{T}_3]_{k_2 k_1} = 0, \quad (2.6)$$

což snadno získáme úpravou vztahu (2.4). Navíc do levého sousedícího bloku, který byl původně nulový, přibude nenulový příspěvek do bloku \mathbf{t}_{23} . Má-li puklinový prvek index j , pak v bloku \mathbf{t}_{23} budou následující nenulové souřadnice:

$$[\mathbf{t}_{23}]_{k_1 j} = \sigma_1; [\mathbf{t}_{23}]_{k_2 j} = \sigma_2. \quad (2.7)$$

Touto úpravou jsme do modelu zahrnuli skutečnost, že ze 3D bloků může být část vody odváděna vloženou puklinou. Nyní musíme tuto skutečnost zahrnout i do druhého, to je puklinového systému. Uvedené vnější přetoky z objemového systému tvoří v j -tém puklinovém elementu zdroj. Tento zdroj se promítne do střední blokové části puklinového systému následujícím způsobem:

Na j -tý řádek bloku \mathbf{t}_{32} do pozic k_1 a k_2 sloupce zapíšeme hodnoty σ_1 respektive σ_2 . Tedy

$$[\mathbf{t}_{32}]_{j k_1} = \sigma_1; [\mathbf{t}_{32}]_{j k_2} = \sigma_2. \quad (2.8)$$

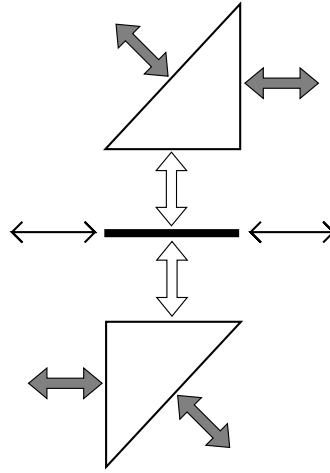
2 KOMBINOVANÝ MODEL - PROPOJENÍ PRVKŮ RŮZNÝCH DIMENZÍ

A tedy $\mathbf{t}_{23} = \mathbf{t}_{32}^T$. Dále na j -tou diagonální pozici bloku $\mathbf{d}_2^\#$ zapíšeme hodnotu $-\sigma_1 - \sigma_2$.

$$\left[\mathbf{d}_2^\#\right]_{jj} = -\sigma_1 - \sigma_2. \quad (2.9)$$

Tím je propojení objemových a puklinových prvků dokončeno.

Nyní popíšeme způsob napojení 2D a 1D prvků. Situace je znázorněna na obrázku 3. Nechť mezi dva puklinové prvky je vložena hrana, která je součástí liniové sítě a může tedy odvádět část podzemní vody do propojeného systému liniových prvků nebo naopak přivádět vodu do puklinového systému.



Obrázek 3: Napojení 2D a 1D prvků

To, jakým způsobem budou tyto prvky mezi sebou komunikovat, závisí shodně jako v předchozím případě na tlakové výšce, která je v těžištích navazujících hran. Je-li mezi hranami umístěn liniový prvek, potom jsou původní hrany okrajové a mohou na nich být rozdílné tlakové výšky. Nechť tedy na hranách puklinových prvků je tlaková výška dána hodnotami $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ a mezi nimi leží liniový prvek, jehož tlaková výška v těžišti je dána hodnotou p , nechť dále mezi prvním puklinovým prvkem a prvkem liniovým je přechodový stav charakterizován hodnotou σ_1 , mezi druhým puklinovým prvkem a prvkem liniovým je přechodový stav charakterizován hodnotou σ_2 a tak dále. Tedy mezi m -tým puklinovým prvkem a prvkem liniovým je přechodový stav charakterizován hodnotou σ_m . Potom okrajové podmínky na sledovaném rozhraní můžeme vyjádřit ve tvaru :

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \sigma_1 (\lambda_1 - p); \quad \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \sigma_2 (\lambda_2 - p); \quad \dots; \quad \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}_m = \sigma_m (\lambda_m - p). \quad (2.10)$$

Tyto podmínky vytvoří modifikace v původně odvozených soustavách pro síť puklinových a liniových prvků, které jsme zapsali do jedné kombinované soustavy. Nyní musíme modifikovat původní soustavu pro puklinovou i liniovou síť. Jednotlivé blokové lokální matice příslušné jednotlivým elementům puklinové sítě násobíme rozevřením. Tedy parametrem d_1^e . Podobně upravíme i soustavu odvozenou ze systému liniových prvků. Jednotlivé blokové lokální matice příslušné jednotlivým elementům liniové sítě násobíme plochou průřezu. Tedy parametrem d_2^e . Opět dbáme na korelaci mezi parametry rozevření a průřezu a příslušnou hodnotou hydraulické propustnosti, tedy $d_1^e \approx \|\mathbf{K}_2^e\|$; $d_2^e \approx \|\mathbf{K}_2^e\|$. Tato úprava je formálně znázorněna horní vlnovkou.

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{A}}_2 & \tilde{\mathbf{B}}_2 & \tilde{\mathbf{C}}_2 \\ \tilde{\mathbf{B}}_2^T & 0 & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_2^T & 0 & \tilde{\mathbf{T}}_2 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{t}_{21} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_{12} & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{A}}_1 & \tilde{\mathbf{B}}_1 & \tilde{\mathbf{C}}_1 \\ \tilde{\mathbf{B}}_1^T & d_1^\# & 0 \\ \tilde{\mathbf{C}}_1^T & 0 & \tilde{\mathbf{T}}_1 \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (2.11)$$

Soustava je navíc doplněna o propojující bloky \mathbf{t}_{12} respektive \mathbf{t}_{21} , přičemž snadno z odvození uvidíme, že bude platit symetrie celé soustavy, speciálně, že $\mathbf{t}_{12} = \mathbf{t}_{21}^T$. Dále jsou upraveny bloky \mathbf{C}_2 a \mathbf{T}_2 . Všechny naznačené úpravy jsou symetrické a nyní tyto úpravy popíšeme. V původní soustavě odpovídající 2D síti jsou sousední prvky odděleny jednou hranou. Pokud se mezi tyto prvky zařadí liniový prvek, potom se z původních vnitřních puklinových prvků stávají prvky okrajové ve vztahu k 2D síti a komunikují pouze s prvkem liniovým, který je odděluje. Předpokládejme, že k této situaci došlo na k -té hraně oddělující i_1, i_2, \dots, i_m puklinový prvek. Potom se původní k -tý sloupec bloku \mathbf{C}_2 obsahující celkem m nenulových souřadnic rozdělí na celkem m sloupců k_1, k_2, \dots, k_m , které budou mít v uvedeném bloku již pouze jednu nenulovou hodnotu (náležící příslušné pozici stěny i_1 -ního, i_2 -hého, \dots , i_m -tého prvku. A pochopitelně i k -tý řádek matice \mathbf{C}_2^T se rozdělí na celkem m řádků, které mají v příslušných pozicích bloku \mathbf{C}_2^T právě jednu nenulovou hodnotu. Uvedeným rozšířením bloků \mathbf{C}_2 a \mathbf{C}_2^T dojde současně i k rozšíření bloku \mathbf{T}_2 , který měl na původní k -té souřadnici na diagonále nulu. Nyní v uvedené matici vznikne celkem $m \times m$ nových pozic. Na mimodiagonálních pozicích budou nuly a na diagonálních vzniklých pozicích budou následující hodnoty:

$$[\tilde{\mathbf{T}}_2]_{k_1 k_1} = -\sigma_1 S_1; [\tilde{\mathbf{T}}_2]_{k_2 k_2} = -\sigma_2 S_2; \dots [\tilde{\mathbf{T}}_2]_{k_m k_m} = -\sigma_m S_m, \quad (2.12)$$

což snadno získáme úpravou vztahu (2.10). Navíc do levého sousedícího bloku, který byl původně nulový, přibude nenulový příspěvek do bloku \mathbf{t}_{12} . Má-li liniový prvek index j , pak v bloku \mathbf{t}_{12} budou následující nenulové souřadnice:

$$[\mathbf{t}_{12}]_{k_1 j} = \sigma_1 S_1; [\mathbf{t}_{12}]_{k_2 j} = \sigma_2 S_2; \dots; [\mathbf{t}_{12}]_{k_m j} = \sigma_m S_m. \quad (2.13)$$

2 KOMBINOVANÝ MODEL - PROPOJENÍ PRVKŮ RŮZNÝCH DIMENZÍ

Touto úpravou jsme do modelu zahrnuli skutečnost, že ze 2D bloků může být část vody odváděna vloženým liniovým prvkem. Nyní musíme tuto skutečnost zahrnout i do liniového systému. Uvedené vnější přetoky z puklinového systému tvoří v j -tém liniovém elementu zdroj. Tento zdroj se promítne do střední blokové části liniového systému následujícím způsobem:

Na j -tý řádek bloku \mathbf{t}_{21} do pozic k_1, k_2, \dots, k_m sloupců zapíšeme hodnoty $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$. Tedy

$$[\mathbf{t}_{21}]_{jk_1} = \sigma_1 S_1; [\mathbf{t}_{21}]_{jk_2} = \sigma_2 S_2; \dots; [\mathbf{t}_{21}]_{jk_m} = \sigma_m S_m. \quad (2.14)$$

A tedy $\mathbf{t}_{12} = \mathbf{t}_{21}^T$. Dále na j -tou diagonální pozici bloku $\mathbf{d}_1^\#$ zapíšeme zápornou hodnotu součtu $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ násobené velikostí plochy příslušné stěny.

$$[\mathbf{d}_1^\#]_{jj} = - \sum_{k=1}^m \sigma_k S_k. \quad (2.15)$$

Některých situacích je vhodné mít i model, který propojuje 3D prvky a 1D prvky. Například jsou-li v horninovém prostředí budovány systémy tunelů nebo vrtů. Pro tento případ odvodíme pro navzájem komunikující systémy následující složenou soustavu rovnic. Význam jednotlivých bloků byl vysvětlen výše.

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{B}_3^T & \mathbf{D}_3 & 0 \\ \mathbf{C}_3^T & 0 & \mathbf{T}_3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{23} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{13} & t_{13} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2^T & \mathbf{D}_2 & 0 \\ \mathbf{C}_2^T & 0 & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{12} & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{31} & t_{31} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_1 & 0 \\ \mathbf{C}_1^T & 0 & \mathbf{T}_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Tato úplná komunikace prvků všech dimenzí je zde uvedena pro úplnost výkladů. Ve zvolené aplikaci se vyskytují pouze 3D a 2D prvky. Proto matice pro jednotlivé varianty budou mít tvar viz 2.5 .